UEDS

TD N°1

OUTILS MATHÉMATIQUES

P1 PHYSIQUE

SORBONNE UNIVERSITÉ

1ER SEMESTRE2021-2022 – VINCENT DECODTS

LES ÉTUDES DE SANTÉ

Exercice 1 : dérivées

1) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^4}{1+x}\right)$ (on pourra développer le logarithme avant de dériver…)

b) $f(x) = (1 - e^{-\alpha . x})^2$ (α est une constante)

c) $f(x) = \sin^2(3x)$

d) $f(x) = \frac{x}{\left(a^2 + x^2\right)^{3/2}}$ (a est une constante)

On pourra mettre $f(x)$ sous la forme : $f(x) = x(a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$

2) Soit la fonction $f(x) = \frac{A}{x^2} + B.x^2$ (A et B sont des constantes positives et $x > 0$).

Déterminer la valeur x_0 pour laquelle $f(x)$ présente un extremum. Dire s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum (on tracera simplement la fonction à partir de ses limites en 0et $+\infty$). Calculer enfin $f(x_0)$.

Exercice 2 : Intégrales

Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

1) $F(x) = \int^{x} \left(\frac{x}{(x^2+1)^3} + \frac{2}{2x-1}\right) dx$

2) $F(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{A}{r^2} dr$ ($A = constante$)

3) $I = \int_{1}^{2} (1 - e^{-x})\, dx$

4) $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{H - x}$ ($0 < h < H$)

5) $I = \int_{0}^{2} \sin^2 x\, dx$

(on utilisera la formule trigo : $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ …)

<u>Exercice 3 : équations différentielles</u>

1) Soit l'équation différentielle :

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v}{r}$$

Où g et r sont des constantes positives.
Résoudre cette équation différentielle sachant qu'à $t = 0$, $v = 0$.

2) Exprimer la valeur limite de $v(t)$, notée v_{lim}. Quelle est l'expression du temps t au boutduquel $v(t)$ est égale à 90 % de v_{lim} ?

A. $\frac{\ln 2}{r}$

B. $3r$

C. $r \ln 2$

D. $r \ln 9$

E. $r \ln 10$

<u>Exercice 4 : équations différentielles</u>

Soit l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Où k et m sont des constantes positives. Résoudre cette équation différentielle sachant qu'à $t = 0, x = x_0$ et $\frac{dx}{dt} = 0$:

A. La pulsation est : $\omega_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}$

B. $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

C. $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t)$

D. $x(t) = x_0(\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t))$

E. $x(t) = \frac{x_0}{\omega_0} (\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t))$

Exercice 5

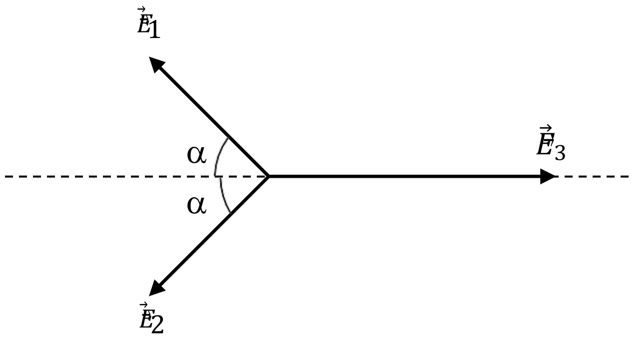
On considère 2 vecteurs définis dans le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ par :

$\vec{U} = a(\vec{u}_x + \vec{u}_y)$ et $\vec{V} = b(\vec{u}_y + \vec{u}_z)$ où a et b sont des constantes positives Calculer $||\vec{U}||$ et $||\vec{V}||$,

puis $\vec{U}.\vec{V}$. En déduire l'angle $\theta = (\widehat{\vec{U}, \vec{V}})$:

A. $30°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $75°$ **E.** $75°$

Exercice 6



Soient les vecteurs $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ et $\vec{E}_3$ tels que : $||\vec{E}_1|| = ||\vec{E}_2||$ et $||\vec{E}_3|| = 2||\vec{E}_1||$; $\alpha = 30°$
Caractériser géométriquement le vecteur : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$
Quelle est l'expression de $||\vec{E}||$ en fonction de $||\vec{E}_1||$?

A. $||\vec{E}|| = ||\vec{E}_1||$
B. $||\vec{E}|| = \sqrt{2}||\vec{E}_1||$
C. $||\vec{E}|| = 2\sqrt{3}||\vec{E}_1||$
D. $||\vec{E}|| = (2 - \sqrt{3})||\vec{E}_1||$

Exercice 7

Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire des coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point M del'espace $(z \neq 0)$:

$$f(x, y, z) = 2\left(\frac{x^3y^2}{z}\right)$$

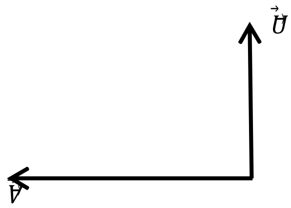
Montrer que le vecteur $\overrightarrow{grad}f$ au point M (1, 1, –1) est colinéaire au vecteur :

$$\vec{U} = 3\vec{u}_x + 2\vec{u}_y + \vec{u}_z$$

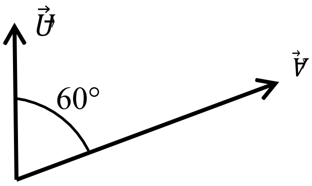
Exercice 5

1) Dessiner et calculer la norme du vecteur $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ dans les différents cas suivants. On donne : $||\vec{U}|| = 2$ et $||\vec{V}|| = 3$.

a)



b)



c)

2) Quelle est la norme du vecteur $\vec{W}$?

$$\vec{W} = \vec{U}\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} \wedge \vec{V}\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$$

A. $\sqrt{7}$ **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $\sqrt{15}$ **D.** $\sqrt{21}$ **E.** 5

Exercice 6

QCS 1. Pour un fluide réel en écoulement laminaire dans un tube de rayon R et de longueur l, lesforces de frottement en un point à la distance r de l'axe du tube, sont reliées à la variation de la vitesse $v\ (r)$ du fluide, par la relation :

$$F(r) = 2\pi\eta r l \frac{dv}{dr}$$

Dans cette relation, l'unité de la constante η appelée coefficient de viscosité dynamique,s'exprime en :

A. $\mathrm{N.m}$

B. $\mathrm{J.s^{-1}}$

C. $\mathrm{kg.m^{-1}}$

D. $\mathrm{Pa.s}$

E. $\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}$

QCS 2. L'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k étiré sur la longueur x estdonnée par la relation :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Quelle est l'unité de la constante k ?

A. $\mathrm{N.m}$

B. $\mathrm{J.s^{-1}}$

C. $\mathrm{kg.m^{-2}}$

D. $\mathrm{N.s^{-1}}$

E. $\mathrm{kg.s^{-2}}$

MERCI D'AVOIR CONSULTÉ CET EXTRAIT DE POLYCOPIÉ !

Si l'accompagnement du CPCM t'intéresse, clique sur le bouton ci-dessous pour compléter ton dossier d'inscription en ligne.

JE M'INSCRIS