UE 4
BIOMATHEMATIQUES

FICHE DE COURS 1 :
Fonctions d’une et de plusieurs variables

Fonctions d'une variable

I) Généralités sur les fonctions d'une variable

Domaines de définition et d'étude

- **Domaine de définition** = ensemble D des valeurs de x pour lesquelles il existe une image $f(x)$ de la fonction f
- **Domaine d'étude** = ensemble inclus dans D sur lequel on étudie f

Parité, imparité, périodicité

- **Parité**

  f est paire : $\boxed{\forall x \in D, -x \in D \ et\, f(-x) = f(x)}$
  La représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
  La dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire.

- **Imparité**

  f est impaire : $\boxed{\forall x \in D, -x \in D \ et\, f(-x) = -f(x)}$
  La représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine des axes.
  La dérivée d'une fonction impaire est une fonction paire.

- **Périodicité**

  f périodique de période $T \neq 0$:

  $$\boxed{\forall x \in D, x + T \in D \ et\, f(x + T) = f(x)}$$

  La dérivée d'une fonction périodique de période T est périodique de même période T.

Comportement aux bornes de l'ensemble de définition D

→ On recherche les valeurs limites de $f(x)$ aux bornes de D

→ Une droite est asymptote à la courbe représentative C de f si elle se rapproche infiniment de C

- si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = A$ alors la droite d'équation $y = A$ est asymptote horizontale en $\pm\infty$ à C
- si $\lim\limits_{x\to A} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = A$ est asymptote verticale en A à C
- si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique en $\pm\infty$ à C

Continuité d'une fonction

→ La fonction f est continue sur une partie de D si et seulement si pour toute valeur x_0 de cette partie de D, on a $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

→ La fonction f est continue en x_0 si « sur le graphe, il n'y a pas de saut en x_0 ».
Il peut arriver qu'on observe des propriétés de continuité différentes selon qu'on tend vers x_0 par valeurs supérieures à x_0, notées x_{0+} ou inférieures à x_0, notées x_{0-} (cas des graphes en escalier).

Dérivée d’une fonction

▪ Taux d’accroissement de f en x_0

→ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

→ C’est la pente de la droite (AB) avec $A(x_0, f(x_0))$ et $B(x, f(x))$

▪ Dérivée en un point x_0 d’une fonction f

→ On dit que f est dérivable en x_0 lorsque la limite du taux d’accroissement de f en x_0 existe et est finie

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)}$$

La dérivée en x_0 est la pente de la tangente en x_0

→ Dérivées usuelles :

$f(x)$	x^n	e^x	$ln\, x$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	nx^{n-1}	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$1+\tan^2 x$

→ Opérations sur les dérivées : u et v dérivables

$$\boxed{(u+v)' = u' + v'}$$
$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$
$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

→ Dérivée d’une fonction composée : soit g une fonction composée définie par $g(x) = f(u(x))$

$$\boxed{g'(x) = f'\big(u(x)\big)u'(x)}$$

→ Propriétés

- dérivable ⇒ continue

  ⚠ réciproque fausse

- dérivées successives : $f''(x) = (f'(x))'$ (quand c’est possible)

- signes et zéros de la dérivée première

  $$f'(x) > 0 \Longrightarrow f\ croissante$$
  $$f'(x) < 0 \Longrightarrow f\ décroissante$$

  Si f' s’annule en changeant de signe en un point d’abscisse a ($f'(a) = 0$) alors a est un extrêmum de f (maximum ou minimum selon le signe de f'')

- signes et zéros de la dérivée seconde

  $$f''(x) > 0 \Longrightarrow f\ convexe$$
  $$f''(x) < 0 \Longrightarrow f\ concave$$

  Si f'' s’annule en changeant de signe en un point d’abscisse a ($f''(a) = 0$) alors la courbe représentative de f présente au point d’abscisse a un point d’inflexion (en $x = a$ la courbe change de concavité et la tangente traverse la courbe)

Différentielle d’une fonction

- ### Notion d’élément différentiel

Soit f dérivable en x_0
La petite variation de f au point x_0 s’écrit df, la petite variation de x s’écrit dx

- ### Différentielle df d’une fonction f

$$\boxed{df = f'(x)dx}$$

- ### Propriétés des différentielles

→ Opérations sur les différentielles : u et v dérivables

$$\boxed{d(u+v) = du + dv}$$
$$\boxed{d(u-v) = du - dv}$$
$$\boxed{d(uv) = udv + vdu}$$
$$\boxed{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}}$$

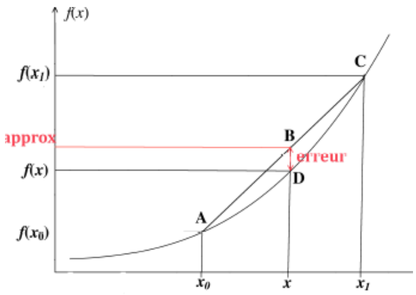
→ Différentielle d’une fonction composée : soit g une fonction composée définie par $g(x) = f(u(x))$

$$\boxed{dg = g'(x)dx = f'(u)u'(x)dx}$$

II) Approximation d’une fonction d’une variable

Interpolation linéaire

Cas où on ne connaît pas l’expression analytique de la fonction f mais seulement quelques points expérimentaux, par exemple $A(x_0, f(x_0))$ et $C(x_1, f(x_1))$



- on détermine la pente $\boxed{a = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}$

l’ordonnée à l’origine $\boxed{b = f(x_1) - ax_1 = f(x_0) - ax_0}$

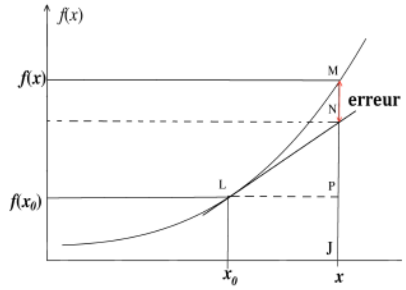
- on approxime $f(x)$ par la droite $\boxed{y = ax + b}$

Approximation affine

Cas où on connaît l’expression analytique de la fonction f

Pour $\Delta x = x - x_0$ suffisamment petit

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + \Delta x \times f'(x_0)}$$



Approximation par développement limité d’ordre n

Cas d’une fonction f continue et n fois dérivable

→ Formule de Taylor au voisinage de x_0

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \times f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \times f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} \times f^{(n)}(x_0) + reste}$$

et le reste tend vers 0

→ Formule de Mac Laurin au voisinage de 0

$$\boxed{f(x) = f(0) + x \times f'(0) + \frac{x^2}{2!} \times f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \times f^{(n)}(0) + reste}$$

et le reste tend vers 0

→ Développement limités utiles au voisinage de 0

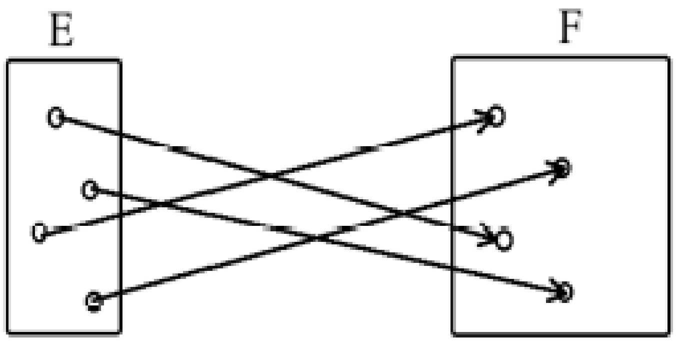
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + reste$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + reste$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + reste$
$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^2 + reste$
$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + reste$

application au calcul de limites dans le cas de formes indéterminées

III) Fonctions bijectives et réciproques

Fonction bijective

Une fonction f est bijective si, sur son domaine de définition D, tout élément de l'ensemble d'arrivée F est image d'un et d'un seul élément de l'ensemble de départ E. Tout élément de F a un et un seul antécédent dans E.



Fonction réciproque

Si une fonction f est bijective de E dans F, alors il existe une fonction f^{-1} bijective de F dans E telle que

$$\boxed{f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = identité}$$

Cette fonction $g = f^{-1}$ est la fonction réciproque de f et l'on a

$$\boxed{g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x}$$

Elle admet pour dérivée

$$\boxed{g'(y) = {f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite $y = x$).

IV) Fonctions exponentielle et logarithme

Fonction exponentielle

→ Fonction exponentielle

- unique fonction bijective dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = f'(0) = 1$, fonction continue strictement positive, notée $f(x) = \exp x = e^x$

$$\boxed{exp(0) = 1, (exp\, x)' = exp\, x}$$

- transforme une somme en produit

$$\boxed{exp\,(a + b) = exp\,(a) \times exp\,(b)}$$

→ Fonction exponentielle de base $a > 0$

$\boxed{f(x) = a^x = e^{x\, ln\, a}, f(x + y) = f(x) \times f(y) \text{ et } f(1) = a}$

Fonction logarithme

→ Fonction logarithme

fonction réciproque de la fonction exponentielle $(exp^{-1} = \ln)$, continue et définie pour les réels > 0

$$y = exp\, x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$\boxed{\ln 1 = 0, (exp\, x)' = exp\, x}$$

$$\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y\,, \ln(x^y) = y \ln x}$$

→ Fonction logarithme de base $a > 0$

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, y = a^x \Leftrightarrow x = log_a\, y}$$

→ Différentielle logarithmique

$$\boxed{d(\ln|y|) = \frac{1}{y} dy = \frac{dy}{y}}$$

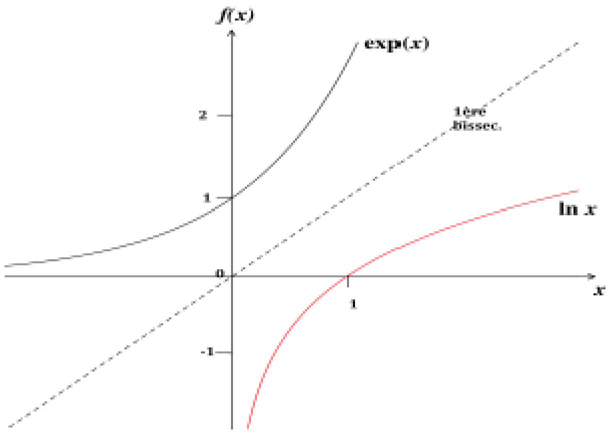
Limites usuelles

$\lim\limits_{x \to 0^+} ln\, x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} ln\, x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Aux bornes des domaines de définition, « l'exponentielle l'emporte sur la puissance » et « la puissance l'emporte sur le logarithme népérien »

$\lim\limits_{x \to 0^+} x\, ln\, x = 0$	$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{ln\, x}{x} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} x\, ln\, x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Représentation graphique



→ Echelle arithmétique

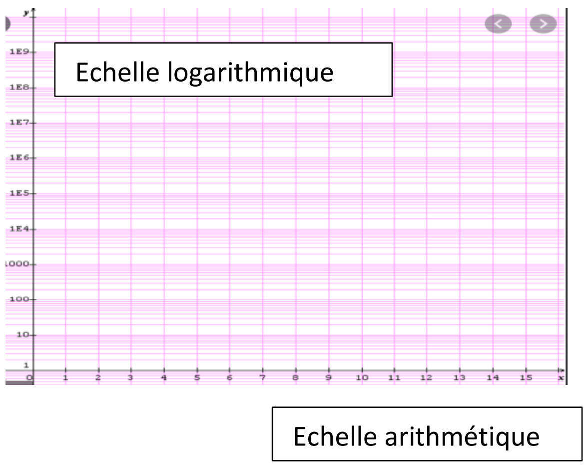
Une valeur x est représentée par un segment de mesure algébrique kx (k facteur d'échelle)

→ Echelle logarithmique

Une valeur x est représentée par un segment de mesure algébrique $k \log_a x$ (k facteur d'échelle, valeur de a couramment utilisée : 10)

→ Papier semi-logarithmique

Il comporte une échelle arithmétique et une échelle logarithmique. L'échelle logarithmique permet de représenter de grands intervalles de valeurs.



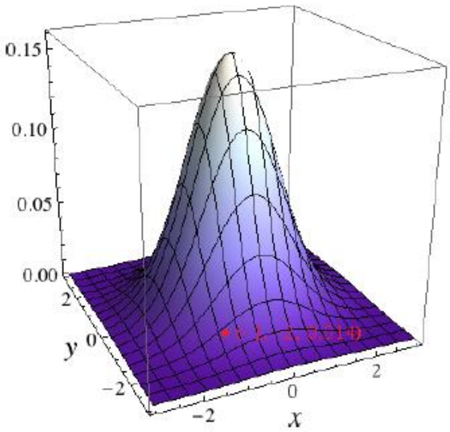
V) Définitions

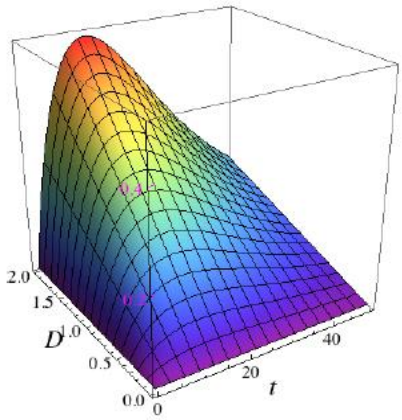
Fonction de deux variables

Une application f définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ et prenant des valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction réelle de deux variables

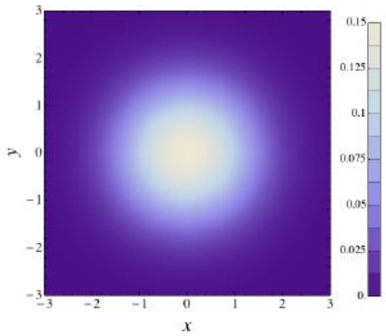
$$f : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

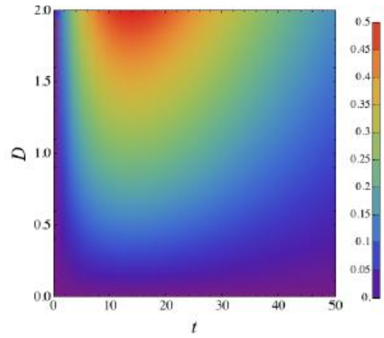
- Une fonction de deux variables est représentée par une surface dans l'espace. A chaque point du plan (x, y) correspond une élévation (ou côte) $z = f(x, y)$. La surface peut être colorée selon la valeur de z afin de mieux visualiser les valeurs de la fonction



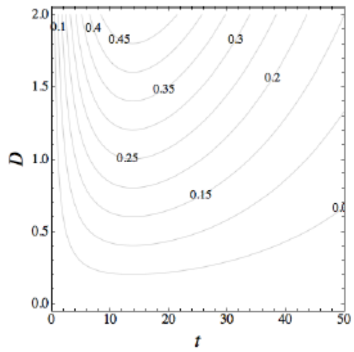


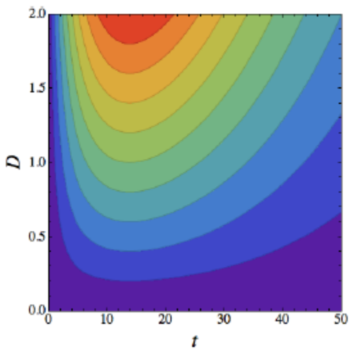
- Une alternative à la représentation en 3D d'une surface dans l'espace est le graphe densité : une projection dans un plan avec un code couleurs qui correspond à la valeur de la fonction





- Une autre représentation de la projection dans un plan consiste en un travé de courbes de niveaux z constants, où est éventuellement superposé le graphe densité.





Fonction de trois variables

Une application f définie sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^3$ et prenant des valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction réelle de trois variables

$$f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

VI) Dérivées partielles

Définition des dérivées partielles

Soit $f(x, y)$ une fonction de 2 variables déinie sur $E \subseteq \mathbb{R}^2$ et un point $A = (x_0, y_0) \in E$. Alors $f(x, y_0)$ et $f(x_0, y)$ sont des fonctions d'une seule variable chacune, x ou y.

Si les limites $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}}$ et $\boxed{\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}}$ existente, alors elles sont appelées dérivées partielles de 1er ordre de f au point A selon x et y respectivement. On note $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}$ et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$.

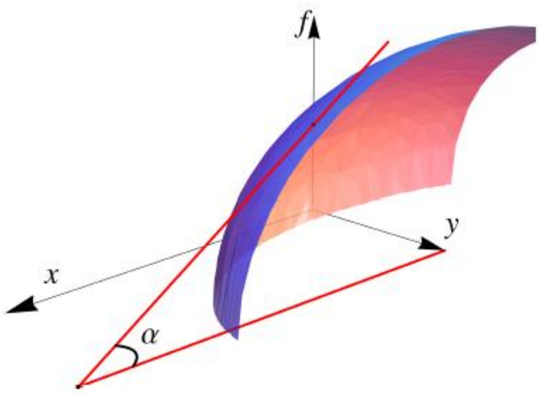
En pratique, pour calculer la dérivée partielle selon une variable, on dérive en considérant les autres variables comme constantes. On retrouve alors les formules de dérivation des fonctions d'une variable.

Interprétation géométrique des dérivées partielles

Une surface $z = f(x, y)$ a un plan tangent en un point et une infinité de droites tangentes en ce point. En effet, toutes les droites contenues dans le plan tangent sont tangentes à la surface.

La pente de la droite tangente parallèle au plan xz est égale à la dérivée partielle de la fonction $f(x, y)$ selon x au point où la droite est tangente à la surface.

De même, la pente de la droite tangente parallèle au plan yz est égale à la dérivée partielle de la fonction $f(x, y)$ selon y au point où la droite est tangente à la surface.



$: \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}$

VII) Applications aux vecteurs

Champ scalaire

On appelle champ scalaire une région de l'espace dans laquelle à chaque point (x, y, z) est associée une grandeur $f(x, y, z)$.

Champ vectoriel

On appelle champ vectoriel une région de l'espace dans laquelle à chaque point (x, y, z) est associé un vecteur

$$\boxed{\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}}$$

Vecteur gradient

Soit une fonction $U(x, y, z)$ définie dans l'espace. On définit le vecteur gradient noté $\overrightarrow{grad}U$ ou ∇U

$$\boxed{\overrightarrow{grad}U = \nabla U = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}$$

La fonction U représente une propriété scalaire dans différents points. Le gradient est un vecteur dont la direction indique vers quelle direction l'augmentation de la fonction est la plus grande (la plus grande pente).

VIII) Dérivées partielles du second ordre

Dérivées partielles d'ordre deux d'une fonction de 2 variables

Les dérivées partielles de 1er ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ d'une fonction de 2 variables peuvent être aussi des fonctions de 2 variables. Si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent, elles sont appelées dérivées partielles de second ordre de la fonction f et sont notées

$$\boxed{\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \ et \ \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{xy} \ et \ \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}}$$

Dérivées partielles d'ordre deux – généralisation

Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de 1er ordre d'une fonction de n variables peuvent être aussi des fonctions de n variables . Si les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent, elles sont appelées dérivées partielles de second ordre de la fonction f et sont notées

$$\boxed{\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\partial x_j} = \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \ si \ i \neq j \\ 0 \ si \ i = j \end{cases}}$$

Théorème de Clairaut et Schwarz

Soit f une fonction de deux variables dont

- les dérivées partielles de 1er ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent
- les dérivées partielles de 2nd ordre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent et sont continues

Alors

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

IX) Différentielles

Différentielles partielles d'une fonction de 2 variables

On appelle différentielles partielles selon x et y d'une fonction f de 2 variables les expressions

$$\boxed{df_x = \frac{\partial f}{\partial x} dx} \text{ et } \boxed{df_y = \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

La différentielle partielle df_x exprime l'accroissement de la fonction f lorsque x varie de dx avec y constant (même chose pour df_y)

Différentielle d'une fonction de 2 variables

On appelle différentielle d'une fonction f de 2 variables l'expression

$$\boxed{df = df_x + df_y = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy}$$

La différentielle en un point définit un plan parallèle au plan tangent à la surface à ce point.
Pour qu'une fonction f à 2 variables soit différentiable en un point, il suffit que ses dérivées partielles de 1er ordre existent et soient continues en ce point. Alors la fonction f est dite régulière.

Différentielle d'une fonction de plusieurs variables – généralisation

On appelle différentielle d'une fonction f de n variables l'expression

$$\boxed{df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}$$

La différentielle d'une fonction f de n variables est nulle sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si la fonction f est une constante dans ce sous-ensemble.

Différentielle logarithmique

La différentielle du logarithme de la valeur absolue d'une fonction f, $d\ln|f|$, est appelée différentielle logarithmique de f.

Après le calcul de la différentielle logarithmique, il est possible de calculer la différentielle. En effet

$$\boxed{dln|f| = \frac{df}{f} \Rightarrow df = f\,dln|f|}$$

Cette notion est généralisable aux fonctions de plusieurs variables.