BIOSTATISTIQUES

FICHE DE COURS 1 :
Probabilités conditionnelles

I) Ensembles

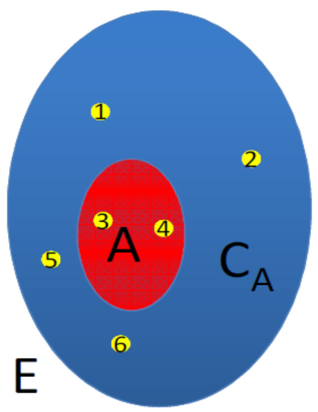
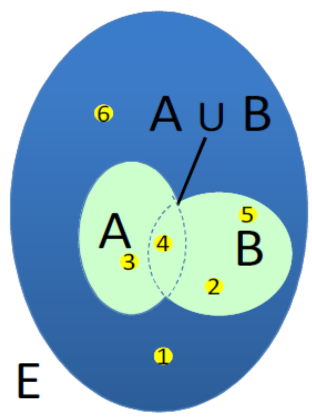
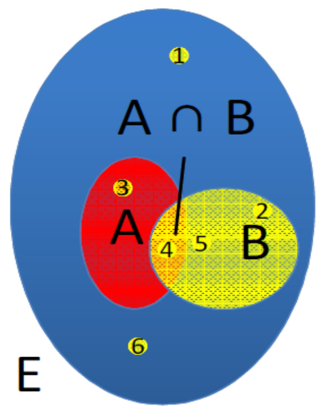
ensemble E = liste non ordonnée d'objets distincts, appelés éléments, qui sont dits appartenir à l'ensemble (notation $p \in E$)

→ un ensemble peut être défini soit en listant ses éléments, soit en donnant la définition de ses éléments

→ cas particuliers : $\emptyset$ (ensemble vide) pour un ensemble à 0 élément
singleton pour un ensemble à un seul élément
E (ensemble universel)

sous-ensemble A de E = tout élément de A est élément de E (notation $\boldsymbol{A \subset E}$)

opérations

Complémentaire : sous-ensemble noté $\boldsymbol{^{c}A}$ **ou** $\boldsymbol{\bar{A}}$ des éléments de E qui n'appartiennent pas à A	**Union** : sous-ensemble noté $\boldsymbol{A \cup B}$ des éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B (ou aux deux)	**Intersection** : sous-ensemble noté $\boldsymbol{A \cap B}$ des éléments de E qui appartiennent à A **et** à B
		

II) Probabilités

expérience aléatoire = expérience dont le résultat n'est pas prévisible

→ **ensemble fondamental** E = ensemble de tous les résultats possibles, il peut être
- fini (dénombrable) : nombre fini d'éléments
- (infini) dénombrable : bijection entre E et $\mathbb{N}$
- (infini) indénombrable : à valeur continue

→ **événement** A = sous-ensemble de E
cas particuliers : $\emptyset$ = événement impossible
singleton = événement élémentaire
E = événement certain

→ événements A et B incompatibles : $\boxed{A \cap B = \emptyset}$

→ système complet d'événements (SCE) $\{A_i\}_{i \in I}$ (événements incompatibles dont la réunion fait E) : $\begin{cases} \forall (i,j) \in I^2, A_i \cap A_j = \emptyset \\ \bigcup_{i \in I} A_i = E \end{cases}$

probabilité P = application : $\wp(E) \longrightarrow [0,1]$

$$A \mapsto P(A)$$

→ $0 \leq P(A) \leq 1$

→ $P(E) = 1$

→ Pour C_A (ou $\bar{A}$) événement contraire, $\boxed{P(C_A) = 1 - P(A)}$

→ Formule du crible $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

→ Pour A et B incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) alors $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

→ Sur un univers fini, en situation d'équiprobabilité,

$$\boxed{P(A) = \frac{CardA \text{ (nombre de cas favorables)}}{CardE \text{ (nombre de cas possibles)}}}$$

→ Sur un univers dénombrable, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le réalisent

→ Sur un univers indénombrable, la probabilité d'un événement élémentaire est nulle

probabilité conditionnelle sachant B P_B = application : $\wp(E) \longrightarrow [0,1]$

$$A \mapsto P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

→ C'est une probabilité (mêmes propriétés)

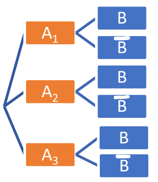
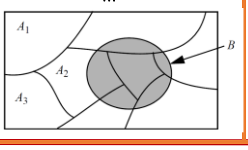
→ A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

La réalisation de l'un des événements est sans influence sur l'autre

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité ! (N.B. : 2 événements incompatibles ne sont pas indépendants, 2 événements indépendants ne sont pas incompatibles)

A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\boxed{P(A/B) = P(A)} \Leftrightarrow \boxed{P(B/A) = P(B)}$

→ pour A et B non indépendants, $P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P_A(B)P(A)$ (formule des probabilités composées)

Formule des probabilités composées ou théorème de la multiplication	avec une famille quelconque d'événements $\{A_i\}_{i \in I}$	$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$
Formule des probabilités totales	avec le SCE $\{A_i\}_{i \in I}$  …	$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$ p.ex., avec le SCE $\{A, \bar{A}\}$, $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$
Formule de Bayes		$P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_{i_0} \cap B)}{\sum_{i \in I} P(A_i \cap B)} = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i \in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}$ p.ex., avec le SCE $\{A, \bar{A}\}$, $P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)}$