UE 4
BIOMATHEMATIQUES

FICHE DE COURS 1 : Probabilités et application à l'évaluation des tests médicaux

I) Probabilités

univers Ω = ensemble des résultats de l'expérience aléatoire
$\wp(\Omega)$ = ensemble des parties de Ω
événements = sous-ensembles de Ω (éléments de $\wp(\Omega)$)

probabilité $\boldsymbol{P}$ = application : $\wp(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$$A \mapsto P(A)$$

→ $P(\Omega) = 1$

→ Pour $\bar{A}$ événement contraire, $\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$

→ Formule du crible $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

→ Pour A et B incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) alors $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

→ Sur un univers fini, en situation d'équiprobabilité,

$$\boxed{P(A) = \frac{CardA \text{ (nombre de cas favorables)}}{Card\Omega \text{ (nombre de cas possibles)}}}$$

→ système complet d'événements (SCE) $\{A_i\}_{i\in I}$ (événements incompatibles dont la réunion fait Ω) : $\begin{cases} \forall i \in I, A_i = \emptyset \\ \forall (i,j) \in I^2, A_i \cap A_j = \emptyset \\ \bigcup_{i\in I} A_i = \Omega \end{cases}$

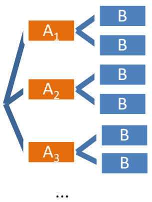
probabilité conditionnelle sachant B $\boldsymbol{P_B}$ = application : $\wp(\Omega) \longrightarrow [0,1]$

$$A \mapsto P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

→ C'est une probabilité (mêmes propriétés)

→ A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$
La réalisation de l'un des événements est sans influence sur l'autre

→ pour A et B non indépendants, $P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P_A(B)P(A)$ (formule des probabilités composées)

Formule des probabilités composées	avec une famille quelconque d'événements $\{A_i\}_{i\in I}$	$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1\cap A_2\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$
Formule des probabilités totales	avec le SCE $\{A_i\}_{i\in I}$ 	$P(B) = \sum_{i\in I} P(A_i \cap B) = \sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$
Formule de Bayes		$P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_{i_0} \cap B)}{\sum_{i\in I} P(A_i \cap B)} = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}$

II) Application à l'évaluation des tests médicaux

	M+	M-
T+	VP	FP
T-	FN	VN

On représente un test médical par un tableau de contingence

M+ malade, M- non malade, T+ test positif, T- test négatif

→ *Résultats corrects* : VP : vrais positifs, VN : vrais négatifs

→ *Résultats incorrects* : FP : faux positifs, FN : faux négatifs

Propriétés d'un test diagnostic

→ Sensibilité : probabilité, lorsque la maladie est présente, que le test soit positif

$$\boxed{Se = P_{M+}(T+) = \frac{P(M+\cap T+)}{P(M+)} = \frac{VP}{VP+FN}}$$

→ Spécificité : probabilité, lorsque la maladie est absente, que le test soit négatif

$$\boxed{Sp = P_{M-}(T-) = \frac{P(M-\cap T-)}{P(M-)} = \frac{VN}{FP+VN}}$$

Un test est de qualité si Se et Sp sont élevés (il est exact si Se=1 et Sp=1). Il est inutile si $Se + Sp = 1$.

Utilisation d'un test diagnostic

→ VPP (Valeur prédictive positive) : probabilité, lorsque le test est positif, que la personne soit malade

$$\boxed{VPP = P_{T+}(M+)}$$

Etude sur l'ensemble des personnes (malades et non malades) ou échantillon représentatif	Etude séparée sur malades et non malades (maladie rares) : nécessite de connaître P(M+) = prévalence de la maladie = pr
$\boxed{VPP = P_{T+}(M+) = \frac{P(M+\cap T+)}{P(T+)} = \frac{VP}{VP+FP}}$	$\boxed{VPP = P_{T+}(M+) = \frac{P(M+\cap T+)}{P(T+)}}$ $\boxed{= \frac{P_{M+}(T+)P(M+)}{P_{M+}(T+)P(M+) + P_{M-}(T+)P(M-)}}$ $\boxed{= \frac{Se * pr}{Se * pr + (1-Sp)*(1-pr)}}$

→ VPN (Valeur prédictive négative) : probabilité, lorsque le test est négatif, que la personne ne soit pas malade

$$\boxed{VPN = P_{T-}(M-)}$$

Etude sur l'ensemble des personnes (malades et non malades) ou échantillon représentatif	Etude séparée sur malades et non malades (maladie rares) : nécessite de connaître P(M+) = prévalence de la maladie = pr
$\boxed{VPN = P_{T-}(M-) = \frac{P(M-\cap T-)}{P(T-)} = \frac{VN}{FN+VN}}$	$\boxed{VPN = P_{T-}(M-) = \frac{P(M-\cap T-)}{P(T-)}}$ $\boxed{= \frac{P_{M-}(T-)P(M-)}{P_{M-}(T-)P(M-) + P_{M+}(T-)P(M+)}}$ $\boxed{= \frac{Sp * (1-pr)}{Sp * (1-pr) + (1-Se)*pr}}$